Sistem Persamaan Lanjar:
Tiga kemungkinan solusi

IF2123 Aljabar Geometri

Oleh: Rinaldi Munir
Program Studi Informatika, STEI-ITB

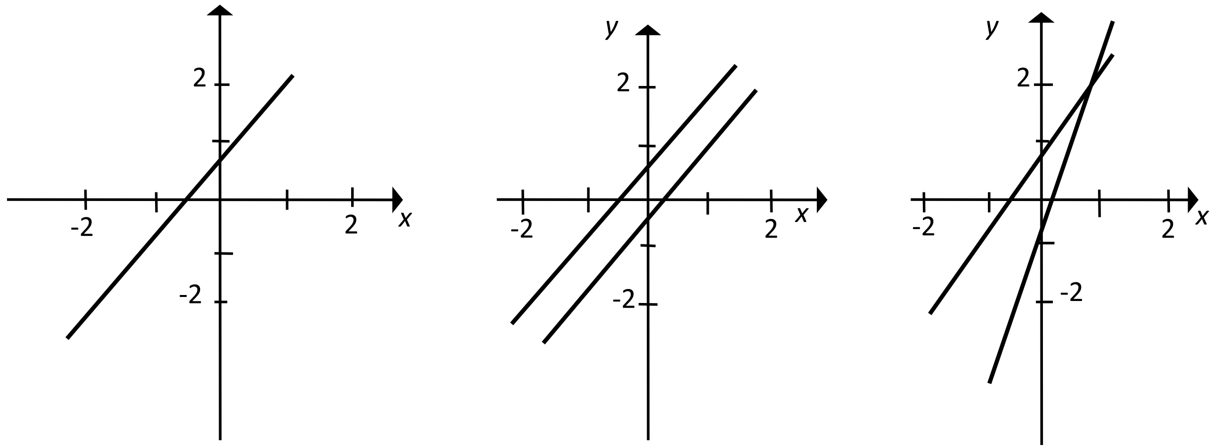
Kemungkinan Solusi SPL

- Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:

  a. mempunyai solusi yang unik (tunggal),

  b. mempunyai tak berhingga banyak solusi, atau

  c. tidak ada solusi sama sekali.

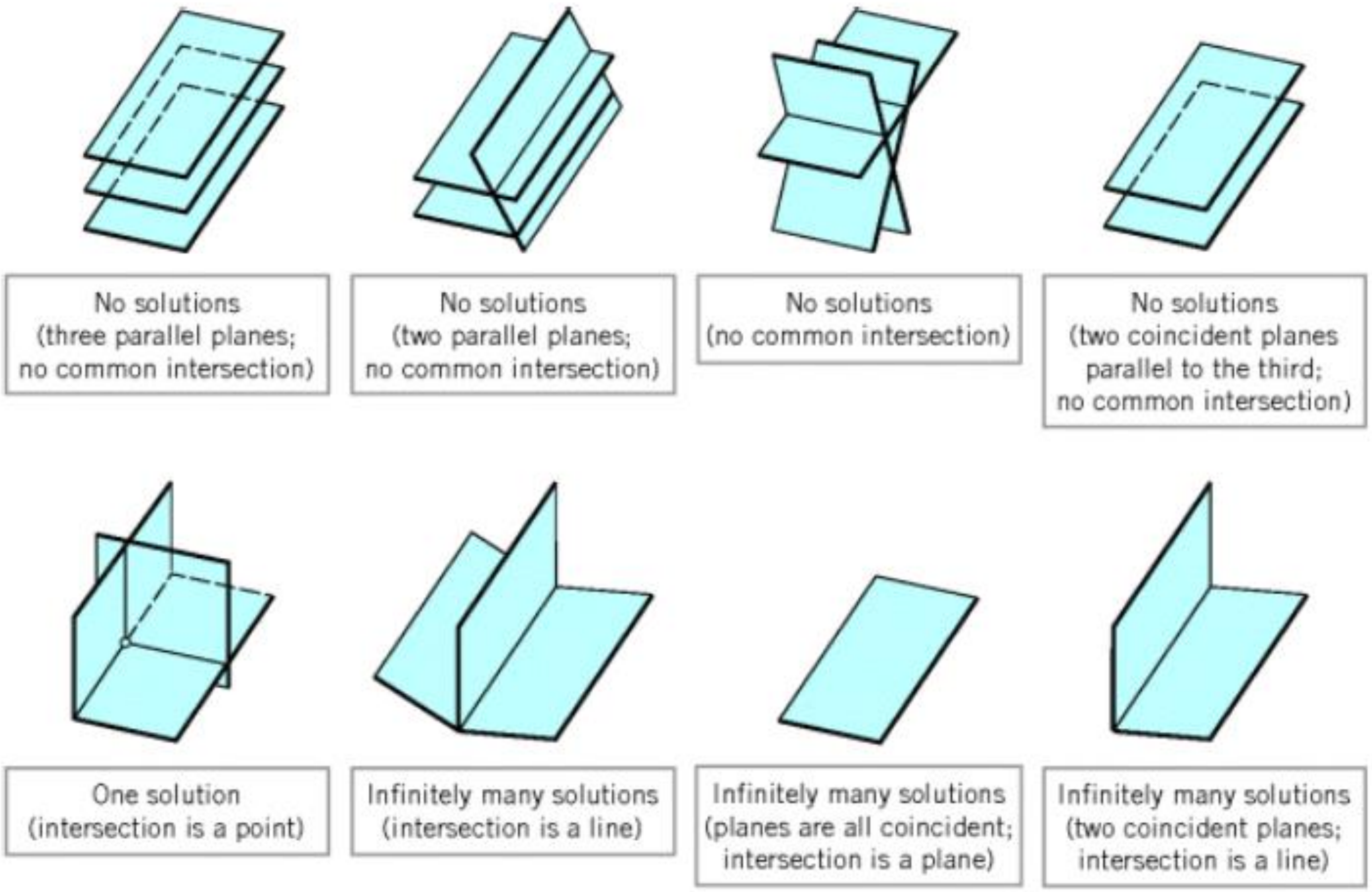


(a) Solusi banyak
$-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$

(b) Solusi tidak ada
$-x + y = 1$
$-x + y = 0$

(c) Solusi unik
$-x + y = 1$
$2x - y = 0$

• Untuk SPL dengan tiga persamaan lanjar:



Sumber gambar: Howard Anton

- Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih), tidak terdapat tafsiran geometrinya seperti pada SPL dengan dua buah persamaan.
- Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya.

1. Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,
maka $x_2 = 2 - k$ dan $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = 4 - (2 - k) - 2k = 2 - k$,
dengan $k \in R$. Terdapat tidak berhingga nilai k.

3. Tidak ada solusi

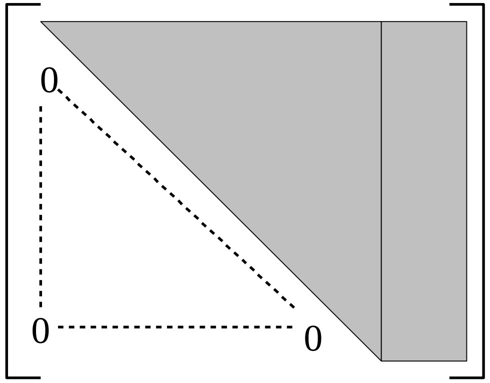
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

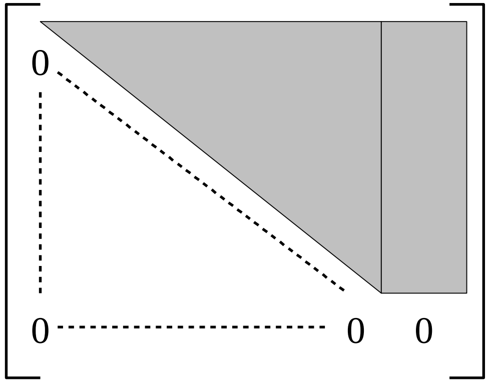
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, $i = 1, 2, 3$

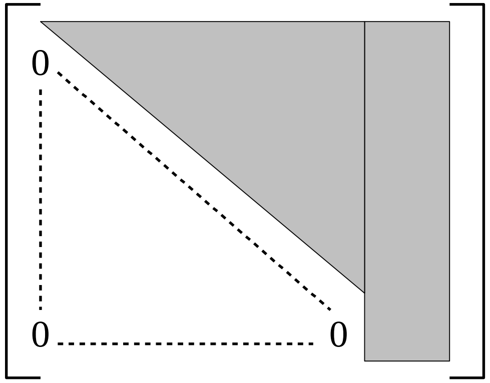
- Bentuk akhir matriks setelah eliminasi Gauss untuk ketiga kemungkinan solusi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Solusi unik



Solusi banyak



Tidak ada solusi

Sejarah

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Wilhelm Jordan (1842–1899)

Historical Note Although versions of Gaussian elimination were known much earlier, the power of the method was not recognized until the great German mathematician Carl Friedrich Gauss used it to compute the orbit of the asteroid Ceres from limited data. What happened was this: On January 1, 1801 the Sicilian astronomer Giuseppe Piazzi (1746–1826) noticed a dim celestial object that he believed might be a "missing planet." He named the object Ceres and made a limited number of positional observations but then lost the object as it neared the Sun. Gauss undertook the problem of computing the orbit from the limited data using least squares and the procedure that we now call Gaussian elimination. The work of Gauss caused a sensation when Ceres reappeared a year later in the constellation Virgo at almost the precise position that Gauss predicted! The method was further popularized by the German engineer Wilhelm Jordan in his handbook on geodesy (the science of measuring Earth shapes) entitled *Handbuch der Vermessungskunde* and published in 1888.

[*Images: Granger Collection (Gauss); wikipedia (Jordan)*]